Didaktik der Geometrie

Inhalte

Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

Kapitel 4: Begriffsbildung

4.1 Beweisen?

Was ist ein Beweis?

- **Ein Beweis**
  - … ist eine „logische Operation, die unter Zuhilfenahme von allgemein akzeptierten Gedankengängen aus schon gegebenen Voraussetzungen neue Erkenntnisse gewinnt." Lexikon der Mathematik
  - … eines mathematischen Satzes S ist dessen logische Reduktion auf andere mathematische Sätze S_1, S_2, …, S_n.

    Ist S mit Hilfe von S_1, S_2, …, S_n bewiesen, so folgt die Gültigkeit des Satzes S aus der Gültigkeit der Sätze S_1, S_2, …, S_n.

    Das bedeutet:
    - Wenn S_1, S_2, …, S_n wahre Aussagen sind, dann ist auch S eine wahre Aussage.
    - Wenn man die Gültigkeit der Sätze S_1, S_2, …, S_n anerkennt, dann kann man die Gültigkeit von S nicht bestreiten. Holland

Warum beweisen?

- **Anwendungsaspekt**

  Ist die Allgemeingültigkeit einer *Aussage*

  - *nicht anschaulich klar*, so dient ein Beweis dieser Aussage dazu *ein*zu*sehen, dass*
  - *anschaulich klar*, dann kann ein Beweis dazu dienen, zu *verstehen, warum*

  die Aussage *allgemeingültig* ist.

- **Deduktiver Aspekt**
  - Kann man den Satz mit Hilfe bereits bekannter Sätze herleiten? (Prozessziel des Beweisens)

- **Aspekt des Problemlösens**
  - Beweisfindung – nicht Beweisdarstellung – steht im Vordergrund
  - Ziel des Beweisens: Beitrag zu Prozesszielen des Problemlösens

- **Struktureller Aspekt**
  - Spielt in der Sek. I praktisch keine Rolle

Kapitel 4: Begriffsbildung

4.2 Niveaustufen des Beweisens

Niveaustufen des Beweisens

- **Stufe des Argumentierens**
  - Nur mündliche Argumentation
  - Bezugnahme auf die Beweisfigur
  - Veranschaulichende Hilfsmittel
  - Beweisverständnis wird nicht angestrebt
  - Unterschied zwischen einer Vermutung und der Einsicht in das „Warum“ erfahren
  - *Tätigkeiten*
    - Argumente angeben
    - Argumente aufgreifen und weiterführen oder widerlegen
    - Beweisgedanken verstehen und in eigenen Worten wiedergeben

präformale, anschauliche Beweise

Niveaustufen des Beweisens

- **Stufe des inhaltlichen Schließens**
  - Notation als Sequenz von Beweisschritten
  - Die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung
  - *Ziel*
    - Sicherung und/oder Verständnis der Allgemeingültigkeit
    - Aspekt der Axiomatisierbarkeit tritt kaum in Erscheinung
  - keine lückenlose Angabe der benutzten Sätze
  - Bezug auf die Beweisfigur bei Aussagen zur Anordnung erlaubt
  - *Tätigkeiten*
    - Die zum Beweis benutzten Sätze angeben
    - Einen Beweis schriftlich reproduzieren
    - Fallunterscheidungen durchführen
    - einfache Beweise selbst finden

formale Beweise

Niveaustufen des Beweisens

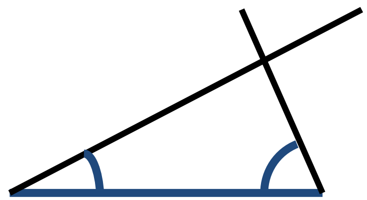
postformale Beweise

- **Stufe des formalen Schließens**
  - Beweisen hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Geometrie als formaler Theorie
  - *Ziel:*
    - Ein in Beweiszeilen dargestellter Beweis.
    - Jede Zeile ist entweder eine Voraussetzung oder folgt aus darüber stehenden Beweiszeilen.
  - *Tätigkeiten*
    - Als Sequenz von Beweiszeilen notieren
    - Auf Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit überprüfen
    - Beweise durch Einfügen zusätzlicher Schritte verfeinern
    - Verschiedene Beweise zum selben Sachverhalt im Hinblick auf die verwendeten Beweismittel bewerten

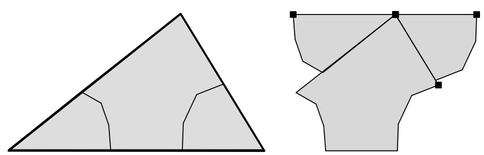
Verschiedene Begründungsweisen

http://www.juergen-roth.de/dynageo/winkelverschiebung/innenwinkelsumme_dreieck.html

Erfahren von Handlungs-spielräumen & Sachzwängen



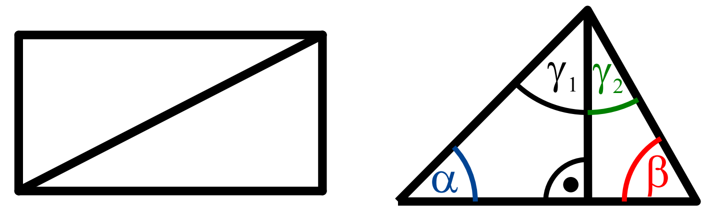
Probieren



Messen

α	β	γ	$\alpha+\beta+\gamma$
31°	44,5°	115°	180,5°
51°	92°	35°	179°

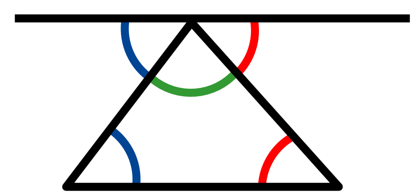
Sonderfälle



$$90^\circ + 90^\circ = (\alpha + \gamma_1) + (\beta + \gamma_2)$$

$$\Rightarrow 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$$

Beweis



Winkel-verschiebung

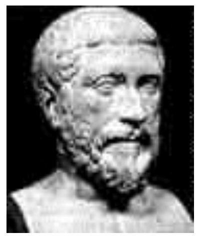
Kapitel 4: Begriffsbildung

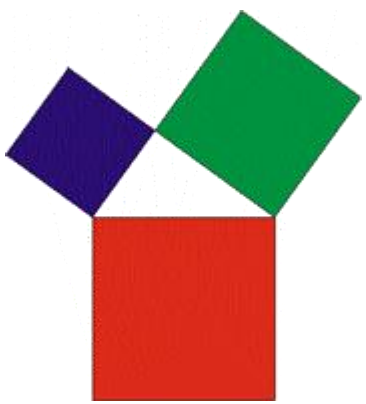
4.3 Beispiel: Satzgruppe des Pythagoras

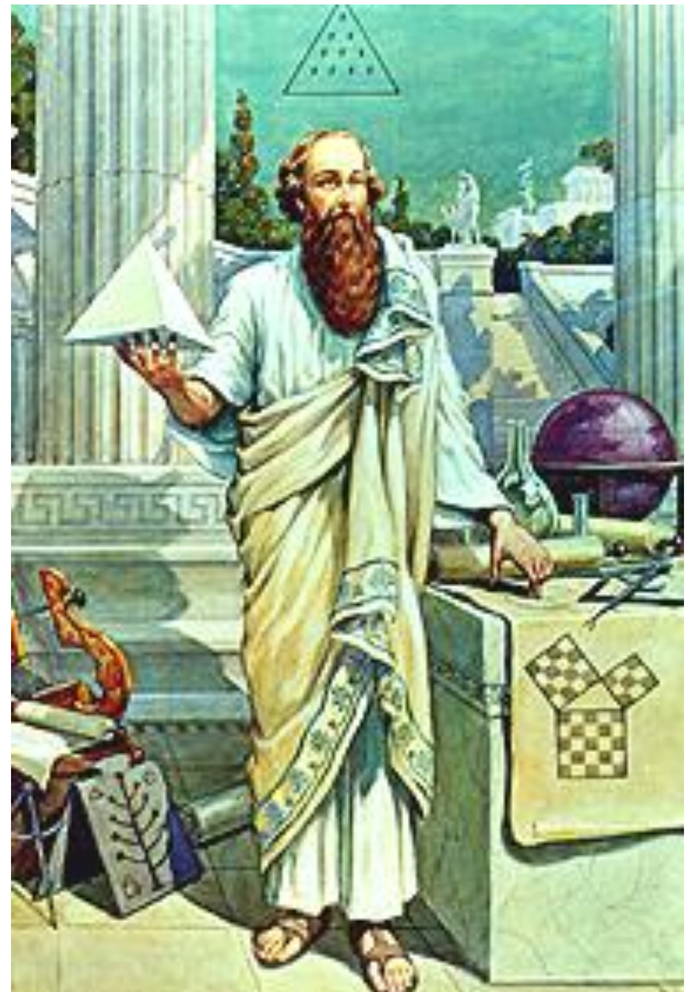
Beispiel

http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/

Satzgruppe des Pythagoras

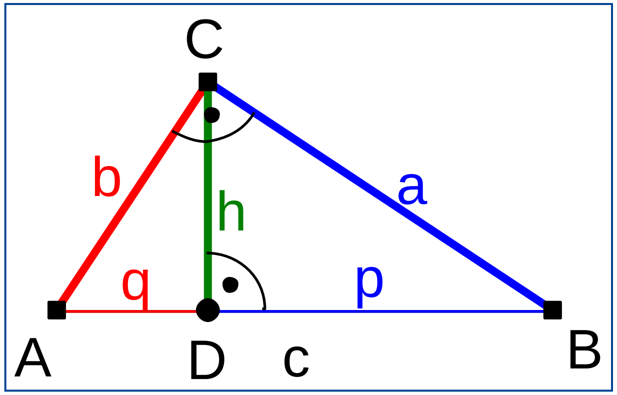






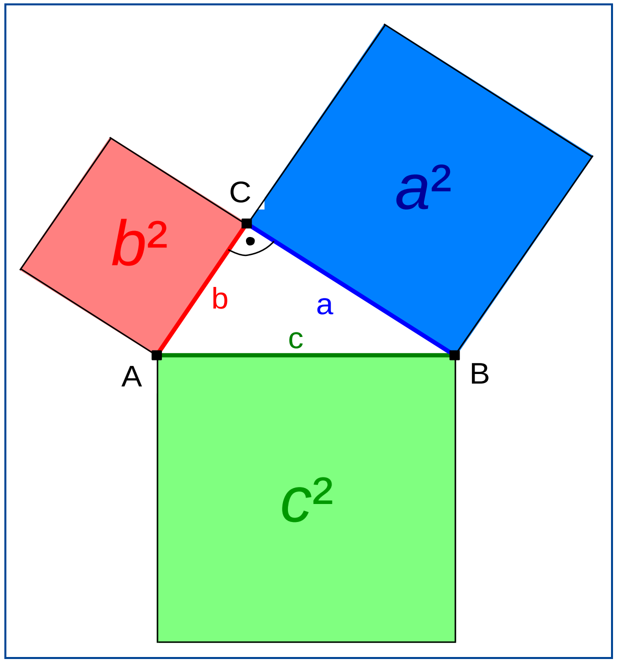
Satz des Pythagoras

- **Satzgruppe des Pythagoras**
  - Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.
  - Zu ihr gehören folgende Sätze:



- **Satz des Pythagoras:**
  - Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

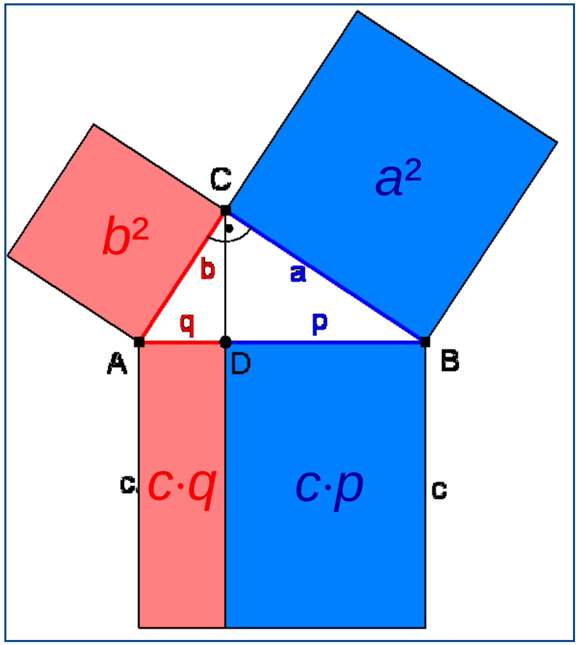
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Kathetensatz und Höhensatz

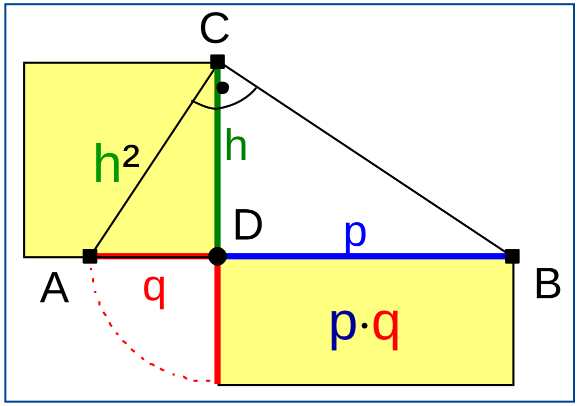
- **Kathetensatz:**
  - Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$



- **Höhensatz:**
  - Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusen-abschnitten.

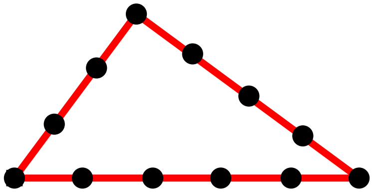
$$h^2 = p \cdot q$$



Logische Struktur der Satzgruppe

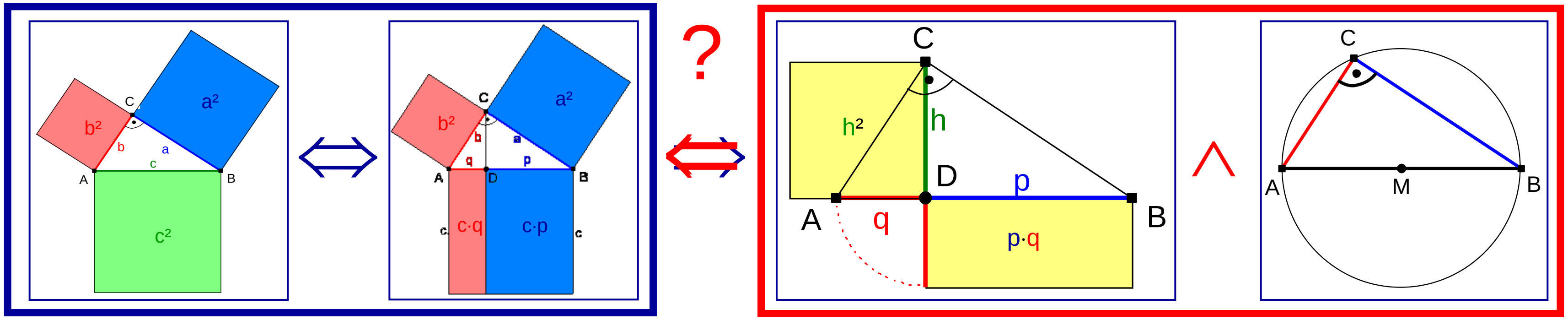
Satz ⇔ Kehrsatzproblematik!

Satz des Pythagoras ⇔ Ägyptische Seilspanner



Logische Abhängigkeit der Sätze:

- Satz des Pythagoras ⇔ Kathetensatz
- Satz des Pythagoras ⇒ Höhensatz
- Kathetensatz ⇒ Höhensatz
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Kathetensatz



Beweisideen

- **Pythagoras → Kathetensatz bzw. Höhensatz**
  - Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die Teildreiecke
  - Arithmetische Umformungen
- **Höhensatz → Satz des Pythagoras bzw. Kathetensatz**
  - Einzeichnen eines geeigneten Thaleskreises
  - Anwendung des Höhensatzes auf ein geeignetes Teildreieck
- **Kathetensatz → Höhensatz**
  - Mehrfache Anwendung des Kathetensatzes auf (Teil-)Dreiecke

Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) Kongruenzbeweis

(2) Abbildungsbeweis

(3) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

(4) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

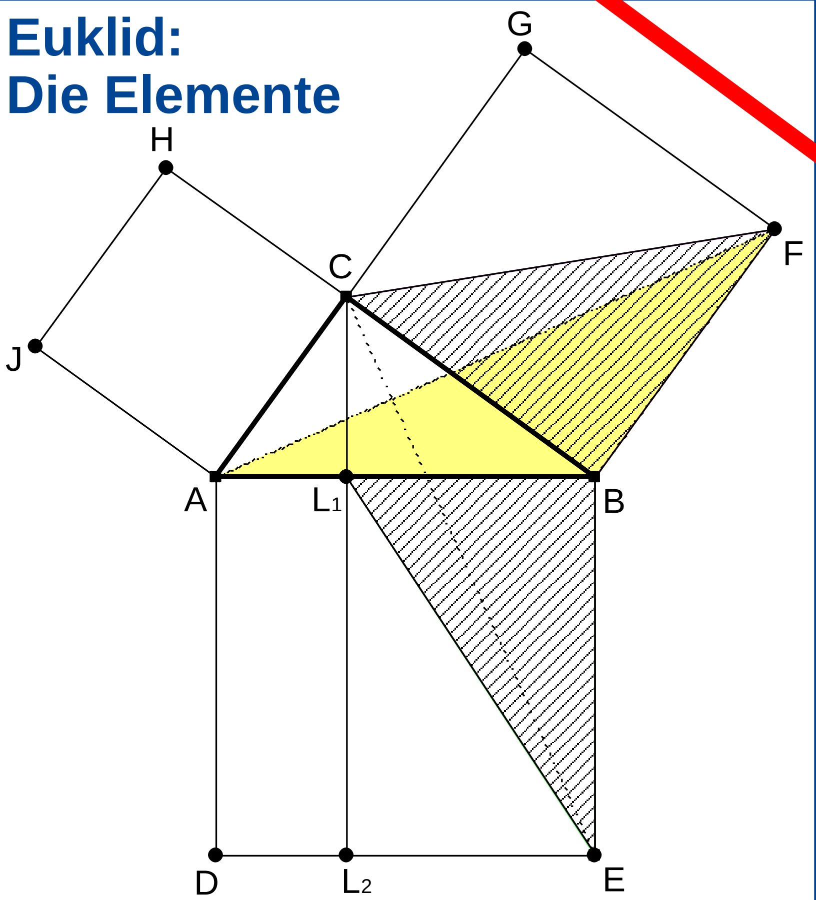
(5) Arithmetischer Beweis

(6) Ähnlichkeitsbeweis

(7) Methoden der analytischen Geometrie

Kongruenzbeweis

Euklid: Die Elemente



(I) $AC \parallel BF \Rightarrow A_{CBF} = A_{ABF}$

(II) $CL_1 \parallel BE \Rightarrow A_{L_1EB} = A_{CEB}$

(III) Zu zeigen: $ABF \cong CEB$

(1) $|AB| = |EB|$ (Hypotenuse c)

(2) $|\angle FBA| = |\angle CBE|$ $(90^\circ + \beta)$

(3) $|BF| = |BC|$ (Kathete a)

$$\overset{\text{SWS}}{\Rightarrow} ABF \cong CEB$$

$$\Rightarrow A_{ABF} = A_{CEB}$$

$$\overset{\text{(I), (II), (III)}}{\Rightarrow} A_{CBF} = A_{L_1BE}$$

$$\Rightarrow a^2 = c \cdot |L_1B| \quad \text{(Kathetensatz 1. Teil)}$$

Analog ergibt sich:

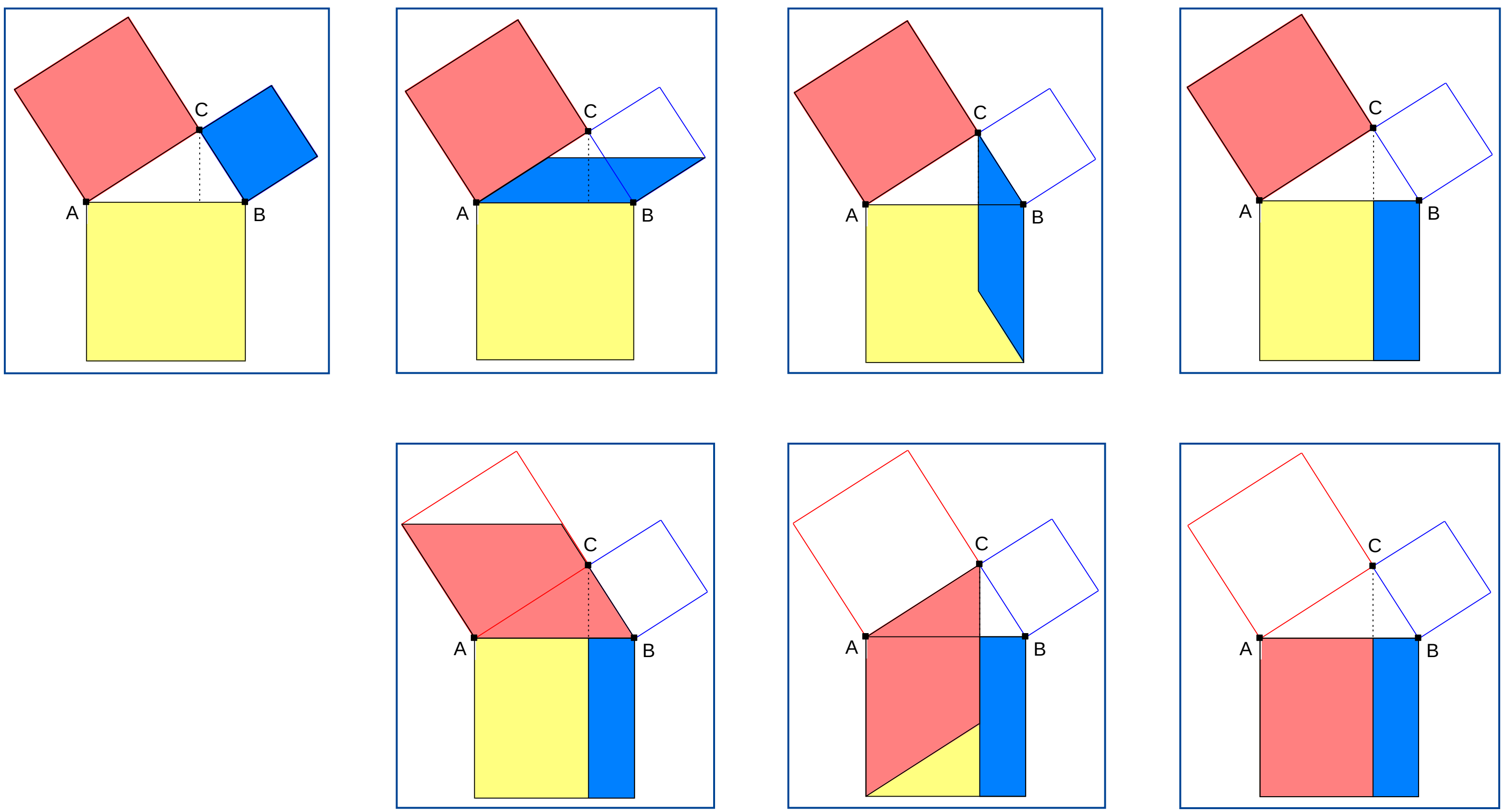
$$b^2 = c \cdot |AL_1| \quad \text{(Kathetensatz 2. Teil)}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot |L_1B| + c \cdot |AL_1|$$

$$= c \cdot (|L_1B| + |AL_1|) = c \cdot c = c^2 \qquad \#$$

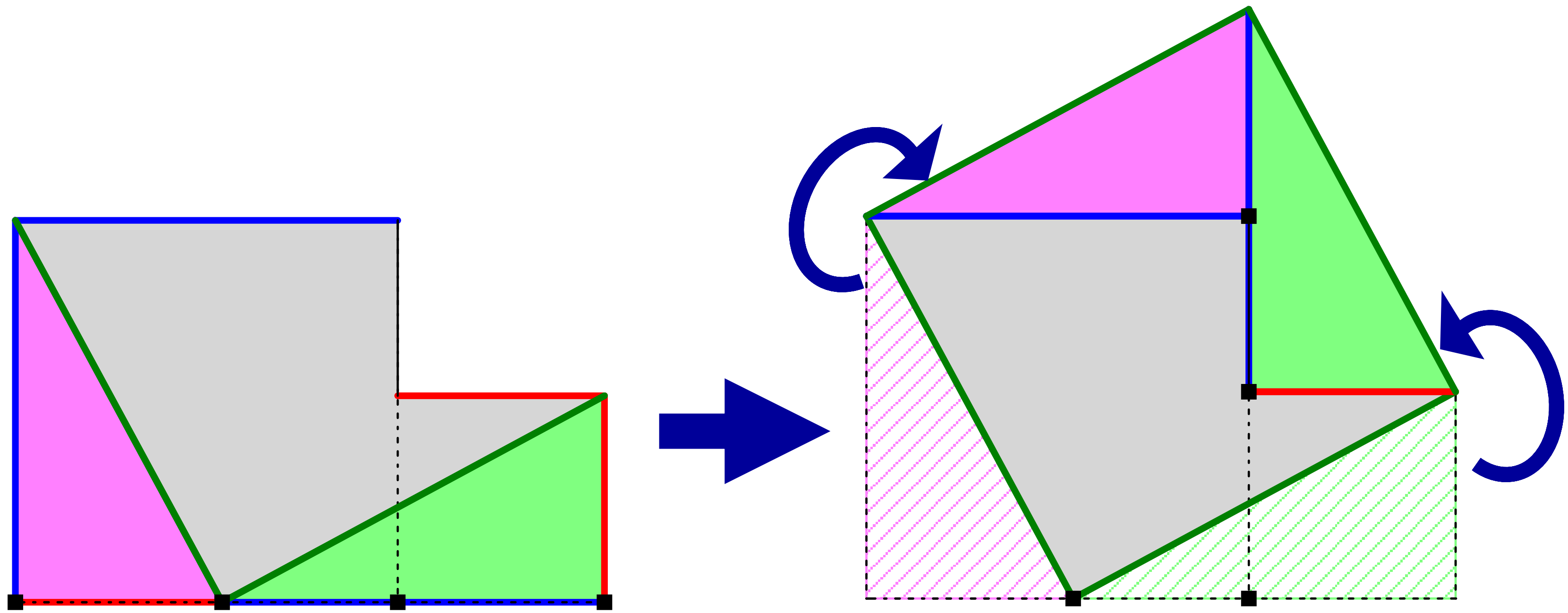
(2) Abbildungsbeweis

Scherung → Drehung → Scherung



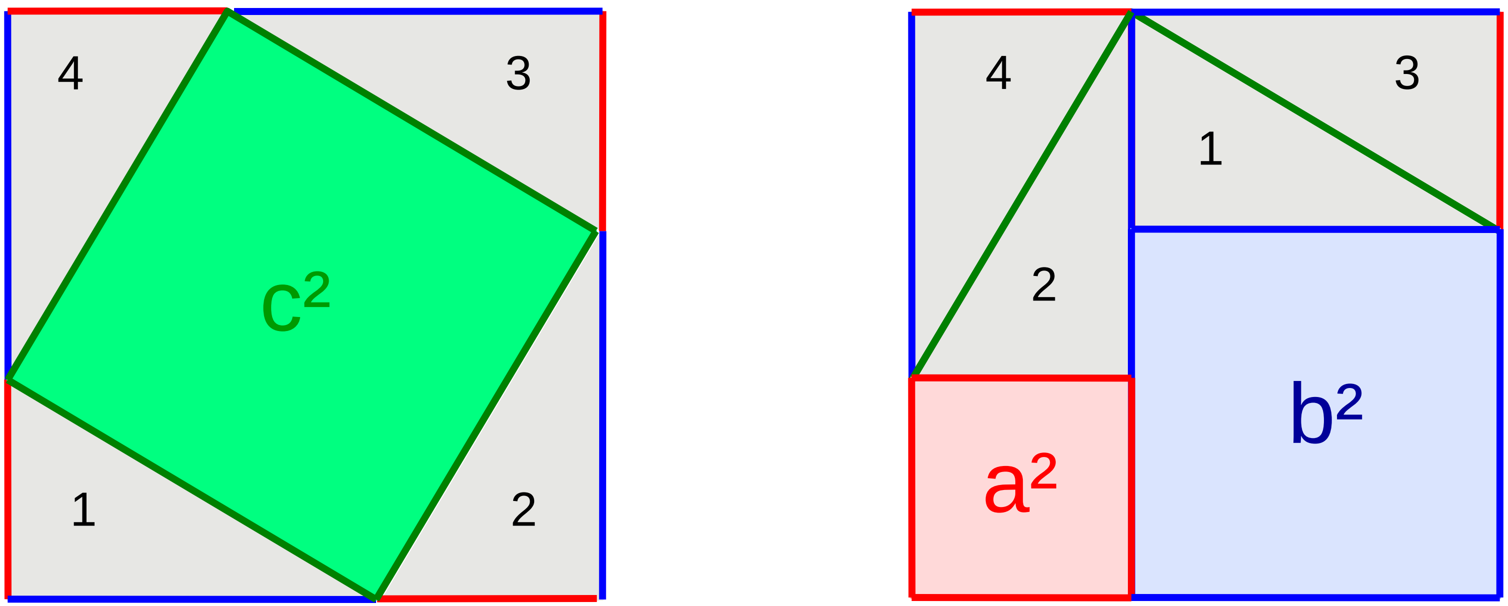
(3) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut



(4) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Altindischer Ergänzungsbeweis



(5) Arithmetischer Beweis

Ein Beweis wird hier „arithmetisch“ genannt, wenn (evtl. anhand einer vorliegenden Figur) rein algebraische Umformungen durchgeführt werden.

Kathetensatz $\Rightarrow$ Satz des Pythagoras

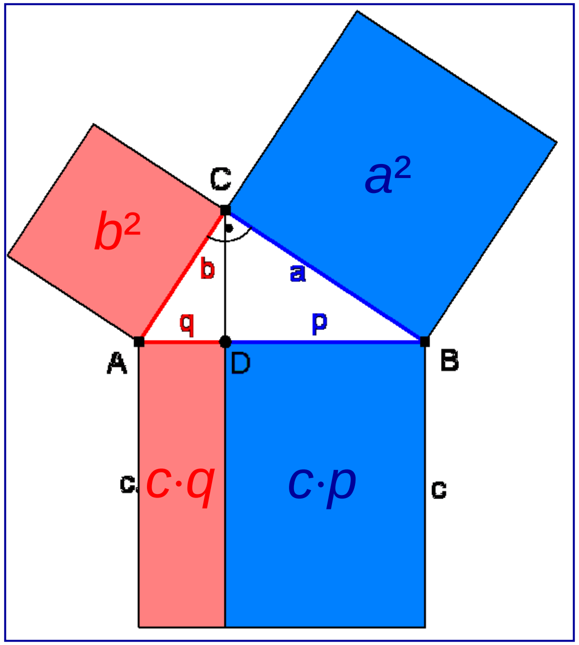
$$a^2 = c \cdot p \quad \wedge \quad b^2 = c \cdot q$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$$

$$= c \cdot (p+q)$$

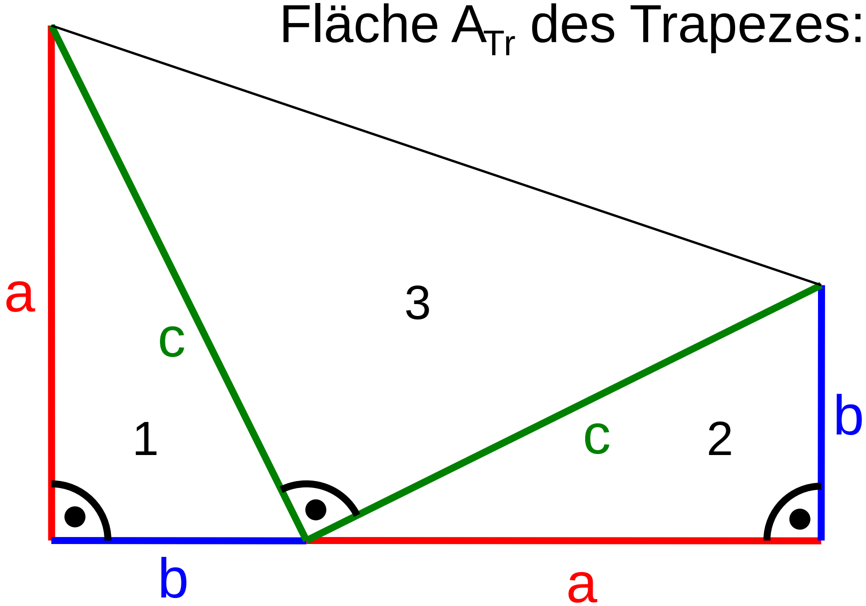
$$= c \cdot c = c^2$$

#



(5) Arithmetischer Beweis

Beweis von J.A. Garfield (1881 Präsident der U.S.A.)



Fläche A_{Tr} des Trapezes:

$$\text{(I)}\quad A_{Trapez} = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

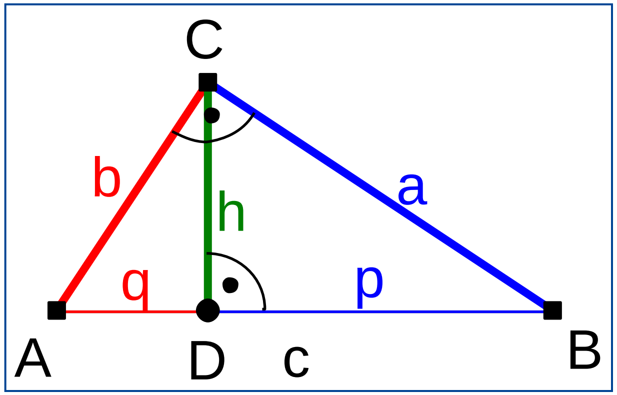
$$\text{(II)}\quad A_{Trapez} = \frac{a+b}{2}\cdot(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$\overset{\text{(I), (II)}}{\Rightarrow}\ ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 \quad\Rightarrow\quad 2ab + c^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow\ \cancel{2ab} + c^2 = a^2 + \cancel{2ab} + b^2 \quad\Rightarrow\quad c^2 = a^2 + b^2$$

#

(6) Ähnlichkeitsbeweis



$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta BCD \qquad \text{(ww)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{h}{p} = \dfrac{q}{h} \Rightarrow h^2 = q \cdot p & \text{Höhensatz} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot q \\[2ex] \dfrac{a}{p} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot p \end{array}\right\} & \text{Katheten-satz} \end{cases}$$

#

(7) Methoden der analytischen Geometrie

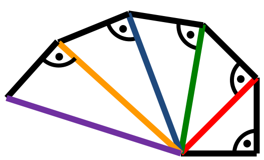
Beweismöglichkeiten Satzgruppe des Pythagoras

- **Kriterien zur Auswahl der Beweismethode(n):**
  - Ein Großteil der Schüler muss durch (u.U. vom Lehrer initiierte) Eigentätigkeit in die Lage versetzt werden, den Beweis oder die entscheidende Beweisidee selbst zu entdecken bzw. einen wesentlichen Beitrag dazu zu leisten.
  - Die Schüler sollen unterschiedliche Beweismethoden kennen lernen.
  - Der Beweis lässt sich gut visualisieren oder enaktiv erarbeiten.
  - Der Beweis ist leicht durchschaubar.
  - Der Beweis erleichtert eine wichtige Erkenntnis.
  - Bei der Satzgruppe des Pythagoras handelt es sich um Flächensätze. ➔ Sollte beim Beweis direkt erkennbar sein.

Anwendungen Satzgruppe des Pythagoras

- **Ebene Geometrie**
  - Berechnungen
    - Diagonale des Rechtecks
    - Höhe & Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks
    - Abstand zweier Punkte (im Koordinatensystem)
    - Kreistangenten und Sehnen
    - Reguläre n-Ecke
    - Kosinussatz
  - Konstruktionen
    - Flächenverwandlung
    - Strecken der Länge $\sqrt{n}$

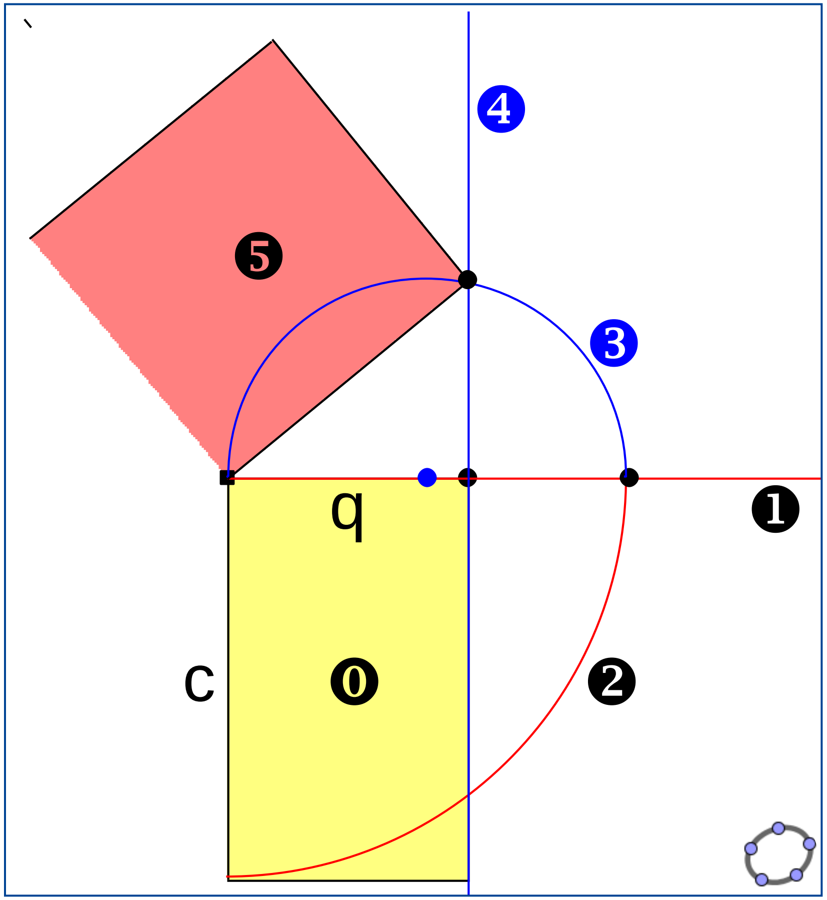
- **Raumgeometrie**
  - Berechnungen
    - Raumdiagonalen
    - Längen im Raum



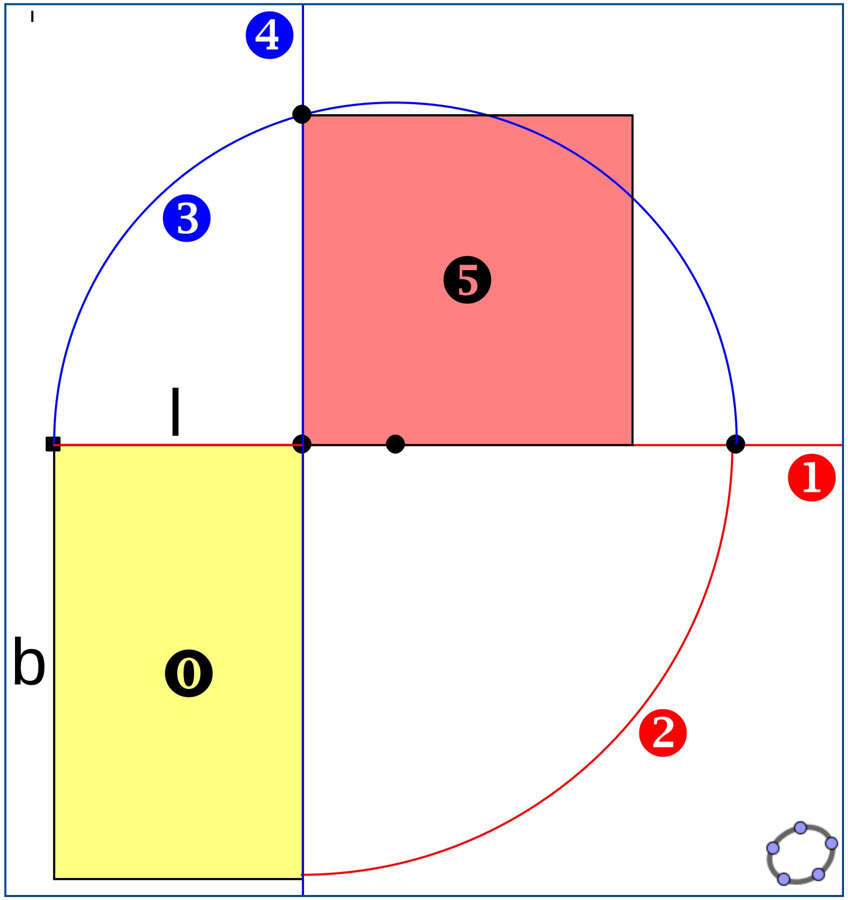
Anwendungen
Satzgruppe des Pythagoras

Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat

Kathetensatz

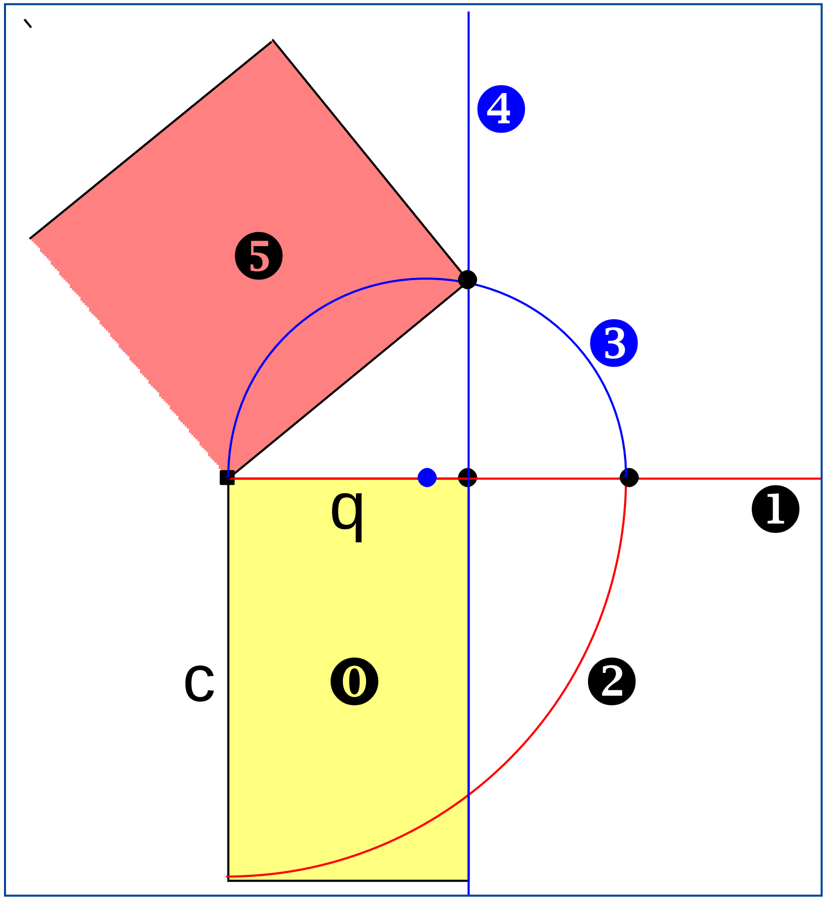


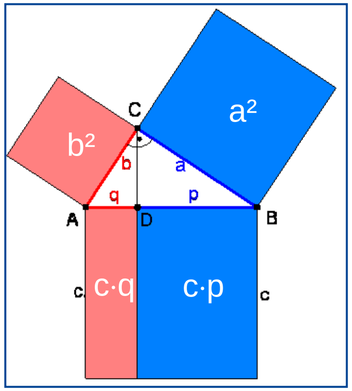
Höhensatz



Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat

Kathetensatz





Man geht von der Figur zum Kathetensatz aus.

Kann man das Quadrat der Figur konstruieren, wenn man das Rechteck hat? → Konstruktion der entsprechenden Kathete.

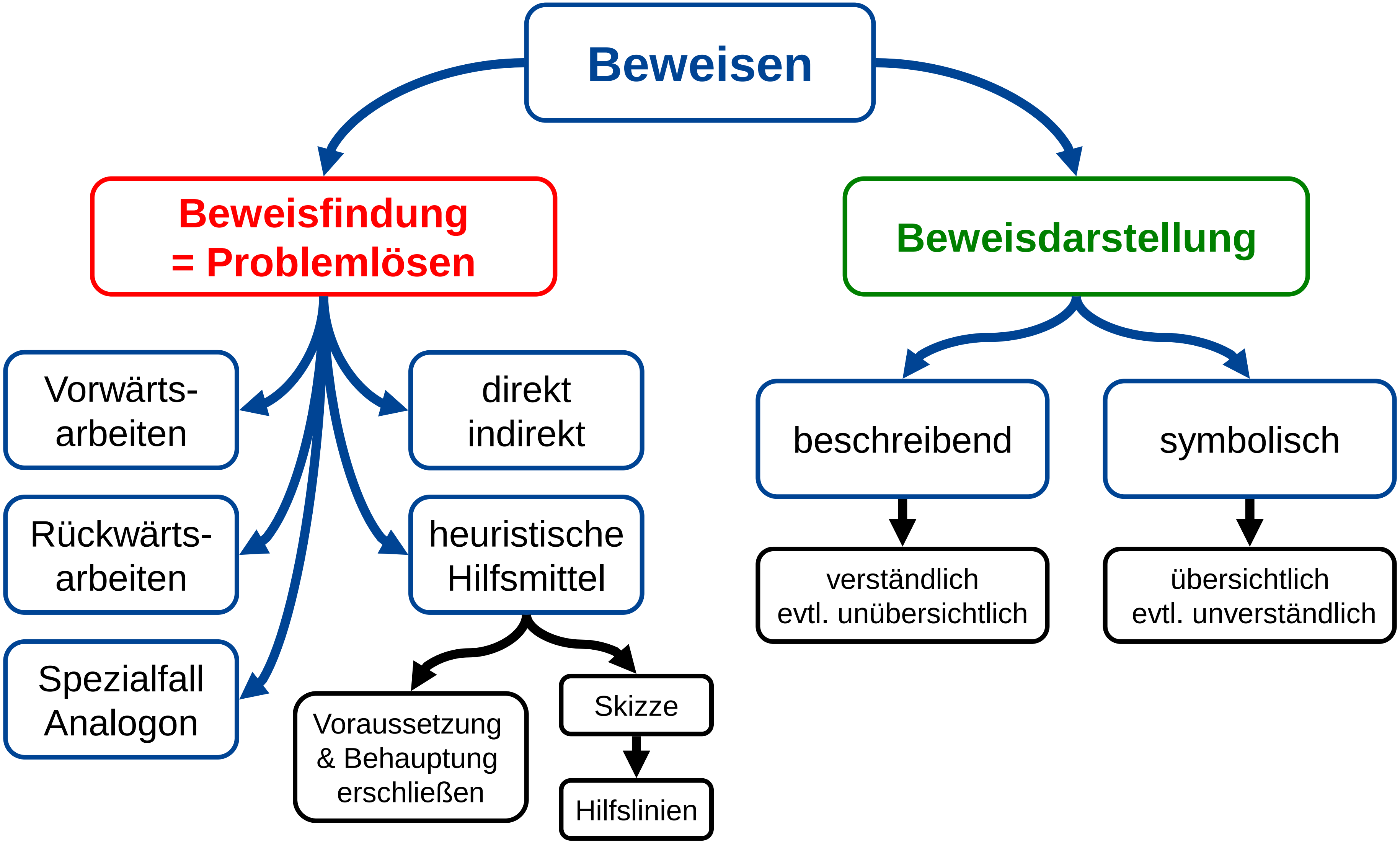
Welche Schritte sind notwendig?

…

Kapitel 4: Begriffsbildung

4.4 Beweisen als Tätigkeit

Beweisen als Tätigkeit



Beweisdarstellung

Aussage:

Jeder Punkt P der Mittelsenkrechten m einer Strecke [AB] ist gleich weit von den beiden Endpunkten der Strecke entfernt.

Voraussetzung:

(1) $P \in m$

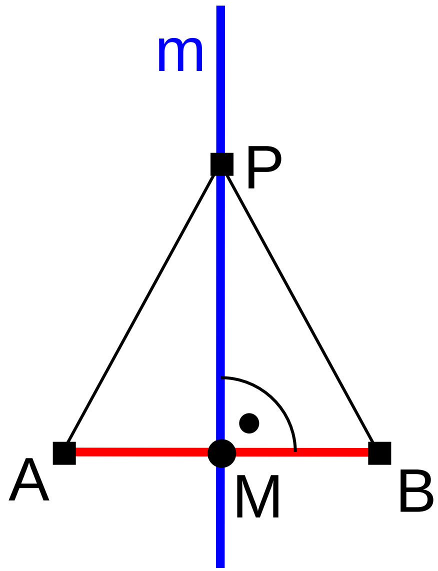
(2) $m \perp [AB]$

(3) $M \in m \cap [AB]$

(4) $|AM| = |BM|$

Behauptung:

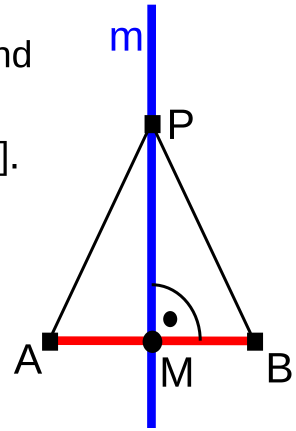
$|AP| = |BP|$



Beweisdarstellung

Beschreibend

Wir betrachten die Dreiecke AMP und MBP und zeigen deren Kongruenz.



m ist Mittelsenkrechte der Seite [AB]. m steht also senkrecht auf der Seite [AB] und halbiert sie im Schnittpunkt M. Damit ist die Seite [AM] des Dreiecks AMP genau so lang wie die Seite [MB] des Dreiecks MBP.

Die bei M liegenden Innenwinkel der beiden Dreiecke sind jeweils rechte Winkel und damit gleich groß.

Schließlich ist die Seite [MP] beiden Dreiecken gemeinsam.

Damit stimmen die beiden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent.

Da kongruente Dreiecke in allen sich entsprechenden Teilen kongruent sind, stimmen auch die dritten Seiten überein, d. h. die Strecken [AP] und [BP] sind gleich lang. #

Symbolisch

Ist der Beweis jeweils streng, d.h. lückenlos?

Vor.: a) $P \in m$

b) $m \perp [AB]$

c) $|AM| = |BM|$

Beh.: $|AP| = |BP|$

Bew.: (Beweisidee: $\Delta AMP \cong \Delta MBP$)

(1)	$\lvert AM\rvert = \lvert BM\rvert$	Vor. c)
(2)	$\lvert\angle PMA\rvert = \lvert\angle BMP\rvert = 90°$	Vor. b)
(3)	$\lvert PM\rvert = \lvert PM\rvert$	Identität

$\Rightarrow$ $\Delta AMP \cong \Delta MBP$ (1);(2);(3);SWS

$\Rightarrow$ $|AP| = |BP|$ entsprechende Seiten in kongruenten Δ

$\Rightarrow$ Beh. #

Beweistechniken

direkter Beweis:
$p \Rightarrow q$

indirekter Beweis
(Bew. d. Kontraposition)
$\neg q \Rightarrow \neg p$

Widerspruchsbeweis
$p \wedge \neg q \Rightarrow ↯$

Abkürzungen:
p: Voraussetzung
q: Behauptung

Beweisen als lokales Ordnen

- **Beweisen:**
  - Aufbau einer Hierarchie von Sätzen von der Voraussetzung bis hin zur Behauptung der zu beweisenden Aussage.
  - Das lokale Ordnen besteht in dieser Rückführung der Behauptung auf andere Aussagen.
  - Suche nach geeigneten Sätzen.
  - Entschieden, ob eine untergeordnete Aussage bewiesen werden muss.
  - Voraussetzung: Fähigkeit, zwischen einem Satz und einer Definition zu unterscheiden.

Beweisen als lokales Ordnen

- **Beispiel:**
  - Zu zeigen: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis gleich groß. (Basiswinkelsatz)
  - Aus
    - „Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten (die dritte Seite heißt Basis)." (Definition)
  - folgt
    - „In gleichschenkligen Dreiecken ist die Seitenhalbierende der Basis auch deren Mittelsenkrechte." (Beweisen!)
  - folgt
    - „Ein gleichschenkliges Dreieck ist achsensymmetrisch bzgl. der Mittelsenkrechten der Basis." (Beweisen!)
  - folgt
    - die Behauptung des Basiswinkelsatzes.

Beweise hängen u.a. von Definitionen ab!

Argumente für das Beweisen in der Sek. I

- **Beweisen bedingt die Entwicklung vieler für den Alltag wichtiger Fähigkeiten:**
  - Notwendigkeit einer gemeinsamen Argumentationsgrundlage erkennen
  - Schlüssigkeit und Wahrheitsgehalt von Aussagen beurteilen
  - vollständig und richtig argumentieren
  - generalisieren, spezialisieren, analogisieren
  - Probleme lösen
  - Phantasie und Akribie
  - individuelle Leistungsbereitschaft und kooperatives Denken
  - Bescheidenheit und Selbstbewusstsein
  - Einsicht in (mathematische) Sachverhalte gewinnen
- **Beweisen ist eine wesentliche Facette der Mathematik**

Methodische Überlegungen zum Beweisen

- **Erst Satzfindung, dann Beweisfindung!**
  - Satz ergibt sich meist aus einem Problem
  - Auffälliges entdecken
  - Besonderes ↔ Selbstverständliches
- **Phasenmodell zum Beweisen im MU**
  - Verbalisieren des Satzes
  - Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung
  - Beweisfindung
  - Verbalisieren des Beweises
  - Rückblick
  - Satz einordnen
  - Variieren – Weiterfragen

Stimmt das? bzw.
Warum stimmt das?