Lösungshinweise zum 10. Übungsblatt

1. *Sätze über Scheitel-, Stufen- und Wechsel- und Nachbarwinkel*

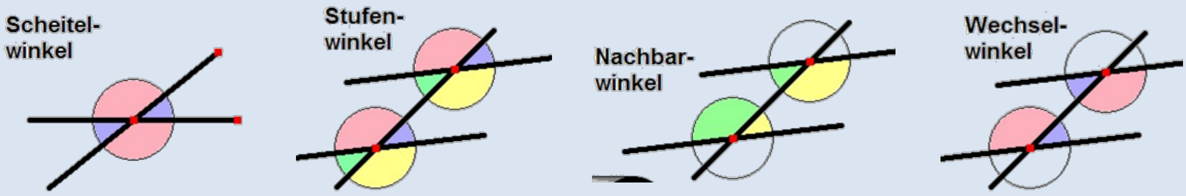
Beweisen Sie:

a) Scheitelwinkel sind kongruent. ***1 BE***

b) Wechselwinkel sind genau dann kongruent, wenn sie an parallelen Geraden liegen. ***4 BE***

c) Stufenwinkel sind genau dann kongruent, wenn sie an parallelen Geraden liegen. ***2 BE***

d) Die Winkelgrößen von Nachbarwinkeln ergänzen sich genau dann zu 180°, wenn sie an parallelen Geraden liegen. ***2 BE***



a) Beweis:
Schneiden sich zwei Geraden g und h in einem Punkt S, dann sind nach Definition 1.12 die Winkel $\angle(g_S, h_S)$ und $\angle(g_S{}^*, h_S{}^*)$ Scheitelwinkel. Die Geraden g und h sind nach Satz 2.35a Fixgeraden der Punktspiegelung P_S. Damit folgt: $P_S(g_S) = g_S{}^*$ und $P_S(h_S) = h_S{}^*$, es gibt also eine Kongruenzabbildung, die den Winkel $\angle(g_S, h_S)$ auf den Winkel $\angle(g_S{}^*, h_S{}^*)$ abbildet. Damit sind die Scheitelwinkel $\angle(g_S, h_S)$ und $\angle(g_S{}^*, h_S{}^*)$ nach Definition 2.4 kongruent.

#

b) Beweis:
„$\Leftarrow$"

$g \parallel h \;\wedge\; g \neq h \;\wedge\; k \cap g = \{P\} \;\wedge\; k \cap h = \{Q\}$

$M = M_{[PQ]}$

$\Rightarrow \quad P_M(P) = Q \;\wedge\; P_M(Q) = P$ [Def. 2.20]

$\Rightarrow \quad P_M(k_P) = P_M([PQ) = [QP = k_Q$ (*)

$P_M(g) \parallel g \;\wedge\; Q \in P_M(g)$ [Satz 2.35b]

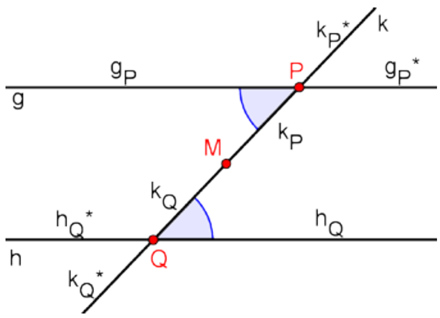
$\Rightarrow \; P_M(g) = h$ [Starkes Parallelenaxiom]

$\Rightarrow \; P_M(g_P) = h_Q \subset h$

[geradentreue von P_M und Satz 2.35d]

$\Rightarrow \; P_M(\angle(g_P, k_P)) = \angle(h_Q, k_Q)$

$\Rightarrow \; \angle(g_P, k_P) \cong \angle(h_Q, k_Q)$ [mit (*)]



#

„$\Rightarrow$"

Annahme: $\angle(g_P, k_P) \cong \angle(h_Q k_Q) \;\wedge\; g \nparallel h$

Nach a) bildet die Punktspiegelung P_M die Gerade g auf eine dazu parallele Gerade h' ab und den Winkel $\alpha = \angle(g_P, k_P)$ auf einen dazu kongruenten Wechselwinkel α' ab. α' und $\angle(h_Q k_Q)$ besitzen den gleichen Erstschenkel, liegen in derselben Halbebene bzgl. k und sind kongruent. Dann liegen die Zweitschenkel der beiden Winkel aber auf derselben Geraden, es gilt also $h' = h$. Dies steht wegen $g \parallel h'$ im Widerspruch zu $g \nparallel h$. Also sind g und h parallel.

#

c) Beweis:
Die Winkel $\angle(g_P^*, k_P^*)$ und $\angle(h_Q, k_Q)$ sind Stufenwinkel.
Es gilt:

$\angle(g_P^*, k_P^*) \cong \angle(g_P, k_P)$ [Scheitelwinkel und a)]

$\angle(g_P, k_P) \cong \angle(h_Q, k_Q) \;\Leftrightarrow\; g \parallel h$ [b)]

$\angle(g_P^*, k_P^*) \cong \angle(h_Q, k_Q) \;\Leftrightarrow\; g \parallel h$ [Transitivität von $\cong$]

#

d) Beweis:
Die Winkel $\angle(g_P, k_P)$ und $\angle(k_Q, h_Q^*)$ sind Nachbarwinkel.
Es gilt:
$\angle(g_P, k_P) \cong \angle(h_Q, k_Q) \iff g \parallel h$ [b)]
Der zweite Schenkel von $\angle(h_Q, k_Q)$ fällt mit dem ersten Schenkel von $\angle(k_Q, h_Q^*)$ zusammen und h_Q sowie h_Q^* sind entgegengesetzte Halbgeraden auf h bzgl. Q. Nach Definition 1.10 bilden die beiden Winkel zusammen also einen gestreckten Winkel.
Insgesamt bilden die Winkel $\angle(g_P, k_P)$ und $\angle(k_Q, h_Q^*)$ also genau dann einen gestreckten Winkel, wenn $g \parallel h$ ist. Mit Definition 3.5 beträgt die Winkelgröße eines gestreckten Winkels 180°.

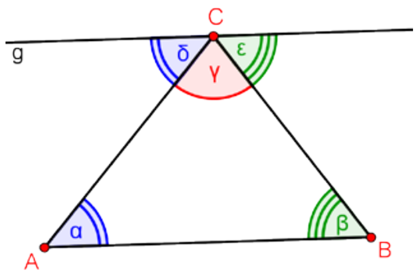
#

2. *Innenwinkelsumme im Dreieck*

Beweisen Sie:
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 180°. ***4 BE***

Beweis:
(1) Die Gerade g ist die Parallele zu AB durch C.
(2) Die Winkel α und δ sind Wechselwinkel an den parallelen Geraden AB und g. Folglich sind sie nach Aufgabe 1b) kongruent.
(3) Auch die Winkel β und ε sind Wechselwinkel an parallelen Geraden AB und g. Folglich sind sie nach Aufgabe 1b) kongruent.
(4) Der erste Schenkel von δ ist g_C*, der zweite Schenkel von δ fällt mit dem ersten Schenkel von γ zusammen. Der zweite Schenkel von γ fällt mit dem ersten Schenkel von ε zusammen und der zweite Schenkel von ε ist g_C.
(5) Da $\angle(g_C^*, g_C)$ ein gestreckter Winkel ist und wegen (2) und (3), gilt für die Summe der Winkelgrößen:

$$\alpha + \gamma + \beta = \delta + \gamma + \varepsilon = 180°$$



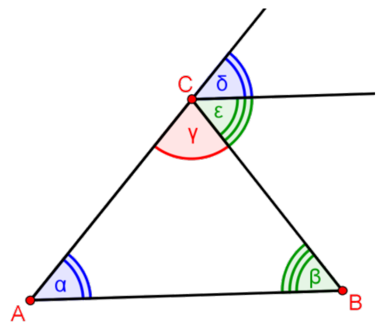
#

3. *Außenwinkelsatz*

Beweisen Sie:
Die Größe eines Außenwinkels im Dreieck ist gleich der Summe der Winkelgrößen der nicht anliegenden Innenwinkel. ***3 BE***

Beweis:
(1) Die Halbgerade g_C liegt auf einer Parallelen g zu AB durch C.
(2) Die Winkel α und δ sind Stufenwinkel an den parallelen Geraden AB und g. Folglich sind sie nach Aufgabe 1c) kongruent.
(3) Die Winkel β und ε sind Wechselwinkel an parallelen Geraden AB und g. Folglich sind sie nach Aufgabe 1b) kongruent.
(4) Der erste Schenkel von γ ist $[CA$, der zweite Schenkel von γ ist $[CB$. $[CB$ ist gleichzeitig der erste Schenkel von ε. Der zweite Schenkel von ε ist g_C. g_C ist gleichzeitig der erste Schenkel von δ und der zweite Schenkel von δ ist $[CA^-$.
(5) Da $\angle([CA, [CA^-)$ ein gestreckter Winkel ist und wegen (2) und (3), gilt für die Summe der Winkelgrößen:

$$\gamma + \beta + \alpha = \gamma + \varepsilon + \delta = 180°$$



Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 16 BE