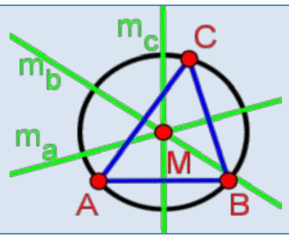
Lösungshinweise zum 7. Übungsblatt

1. *Kreis und drei nicht kollineare Punkte*

Beweisen Sie:
Ein Kreis ist durch drei verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind, eindeutig bestimmt.
Hinweis: Ein Kreis ist durch die Angabe von Mittelpunkt und Radius eindeutig bestimmt.



5 BE

Beweis:
Die Punkte A, B und C sind paarweise verschieden und nicht kollinear.

(1) Die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ der Strecke $[AB]$ ist die Symmetrieachse von A und B.

$$\Rightarrow \quad \forall\, P \in m_{[AB]}: \quad [AP] \cong [BP]$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\forall\, P \in m_{[BC]}: \quad [BP] \cong [CP]$$
$$\forall\, P \in m_{[AC]}: \quad [AP] \cong [CP]$$

(2) Nach Satz 2.26 gilt für den Kreismittelpunkt M:

$$M \in m_{[AB]} \;\wedge\; M \in m_{[BC]} \;\wedge M \in m_{[CA]}$$

(3)
$$m_{[AB]} \neq m_{[BC]}\,,\ \text{da}\ M_{[AB]} \in m_{[AB]} \;\wedge\; M_{[AB]} \notin m_{[BC]}$$
$$m_{[AB]} \neq m_{[CA]}\,,\ \text{da}\ M_{[AB]} \in m_{[AB]} \;\wedge\; M_{[AB]} \notin m_{[CA]}$$
$$m_{[BC]} \neq m_{[CA]}\,,\ \text{da}\ M_{[BC]} \in m_{[BC]} \;\wedge\; M_{[BC]} \notin m_{[CA]}$$

$$\overset{(2),\,(3)}{\Rightarrow} \quad m_{[AB]} \cap m_{[BC]} \cap m_{[BC]} = \{M\}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad [MA] \cong [MB] \cong [MC]$$

$$\Rightarrow \quad |MA| = |MB| = |MC|$$

$\overset{\text{Def. 2.19}}{\Rightarrow}$ $A, B, C \in k(M, |MA|)$, sie liegen also auf dem ***Umkreis*** des Dreiecks ABC. #

2. *Kreis und Tangente*

Beweisen Sie:
Berührt die Tangente t den Kreis $k(M, |MB|)$ im Punkt B, dann steht t senkrecht auf der Geraden MB.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Gehen Sie dabei von der Annahme aus, dass t den Kreis $k(M, |MB|)$ im Punkt B berührt und *nicht* senkrecht auf MB steht.

5 BE

Widerspruchsbeweis:
Annahme: $t \cap k(M, |MB|) = \{B\} \;\wedge\; t \not\perp BM$ $\quad (\Rightarrow \angle(t_B, [BM])$ ist spitz.)

$$\overset{\text{Satz 1.21}}{\Rightarrow} \quad \exists!_{s \subset \varepsilon} \quad s \perp t \;\wedge\; M \in s \;\wedge\; s \cap t = \{F\} \;\wedge\; F \neq B$$

$\overset{\text{Satz 2.24}}{\Rightarrow}$ $|FM| < |BM|$ (Dem größeren Winkel liegt die längere Seite gegenüber.)

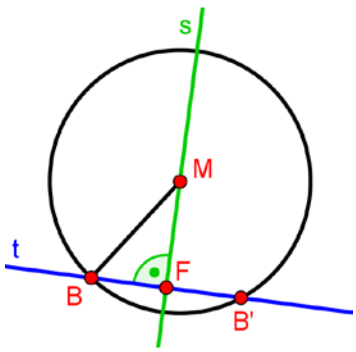
$$\Rightarrow \quad F \in k_i(M, |MB|)$$

(1) $B' = S_s(B)$

$$\overset{\text{Satz 1.13}}{\Rightarrow} [B'M] \cong [BM]$$
$$\Rightarrow |B'M| = |BM|$$
$$\overset{\text{Def. 2.19}}{\Rightarrow} B' \in k(M, |MB|)$$

(2) $s \perp t$

$$\overset{\text{Def. 1.19}}{\Rightarrow} S_s(t) = t$$
$$\underset{B \in t}{\Rightarrow} B' = S_s(B) \in t$$



$$\overset{(1),\,(2)}{\Rightarrow} \quad B' \in t \cap k(M, |MB|)$$

↯ Widerspruch zur Voraussetzung $t \cap k(M, |MB|) = \{B\}$

$\Rightarrow$ Die Annahme war falsch und es gilt $t \perp BM$. #

3. Schnittpunkte

a) Beweisen Sie Satz 2.29b:
Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Gehen Sie dabei von der Annahme aus, dass sich zwei Kreise $k_1(M_1, r_1)$ und $k_2(M_2, r_2)$ in mehr als zwei Punkten schneiden. **2 BE**

b) Beweisen Sie Satz 2.29c:
Eine Gerade und ein Kreis schneiden sich in höchstens zwei Punkten.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Gehen Sie dabei von der Annahme aus, dass sich der Kreis $k(M, r)$ und die Gerade g in mehr als zwei Punkten schneiden. **3 BE**

b) Beweis:

Annahme: $\exists_{P,Q,R\in \mathbf{P}}\ P, Q, R \in g \cap k(M, r)$

O.B.d.A. gelte: P-Q-R

$$\Rightarrow \quad M_{[PQ]} \neq M_{[QR]} \ \wedge\ M_{[PQ]} \in m_{[PQ]} \cap g \ \wedge\ M_{[QR]} \in m_{[QR]} \cap g$$

$$\overset{m_{[PQ]},\, m_{[PQ]} \perp g}{\underset{\text{Satz 1.22}}{\Rightarrow}} \quad m_{[PQ]} \parallel m_{[QR]} \ \wedge\ m_{[PQ]} \neq m_{[QR]} \ \Leftrightarrow\ m_{[PQ]} \cap m_{[QR]} = \emptyset$$

↯ Widerspruch zu Satz 2.26 der besagt, dass $M \in m_{[PQ]} \cap m_{[QR]}$ ist.

Damit ist die Annahme falsch. Eine Gerade und ein Kreis können sich also höchstens in zwei Punkten schneiden.

#

a) Beweis:

Annahme: $k_1(M_1, r_1) \neq k_2(M_2, r_2) \quad \wedge \quad \exists_{P,Q,R\in \mathbf{P}}\ P, Q, R \in k_1(M_1, r_1) \cap k_2(M_2, r_2)$

$$\overset{\text{Satz 2.26}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} M_1 \in m_{[PQ]} \ \wedge\ M_2 \in m_{[PQ]} \\ M_1 \in m_{[QR]} \ \wedge\ M_2 \in m_{[QR]} \\ M_1 \in m_{[PR]} \ \wedge\ M_2 \in m_{[PR]} \end{array} \right\} \overset{(I_2)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} M_1M_2 = m_{[PQ]} \\ M_1M_2 = m_{[QR]} \\ M_1M_2 = m_{[PR]} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad S_{M1M2}(P) = Q \ \wedge\ S_{M1M2}(Q) = P \ \wedge\ S_{M1M2}(Q) = R \ \wedge\ S_{M1M2}(R) = Q \ \wedge\ S_{M1M2}(P) = R \ \wedge\ S_{M1M2}(R) = P$$

↯ Widerspruch zu (GS_1) das besagt, dass es zu jedem Punkte einer Ebene bzgl. jeder Geraden genau einen Bildpunkt gibt.

Damit ist die Annahme falsch. Zwei Kreise können sich also höchstens in zwei Punkten schneiden.

#

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: **15 BE**