

## Lösungshinweise zum 4. Übungsblatt

### 1. Achsenspiegelungen erhalten die Achsensymmetrie einer Figur

Führen Sie den Beweis zu Satz 1.18 vollständig aus, beweisen Sie also:

Ist  $a$  die Symmetrieachse der Punkte  $P$  und  $Q$  und  $g$  eine beliebige Gerade in der Ebene  $\varepsilon$ , dann ist  $a' = S_g(a)$  die Symmetrieachse der Punkte  $P' = S_g(P)$  und  $Q' = S_g(Q)$ .

5 BE

**Beweis:**

$$(1) S_a(P) = Q \Leftrightarrow \exists_{A,B \in a} [PA] \cong [QA] \wedge [PB] \cong [QB]$$

$$(2) \text{ Mit } A' = S_g(A) \text{ und } B' = S_g(B) \text{ folgt aus}$$

der Geradentreue der Spiegelung an  $g$ :  $A', B' \in a'$

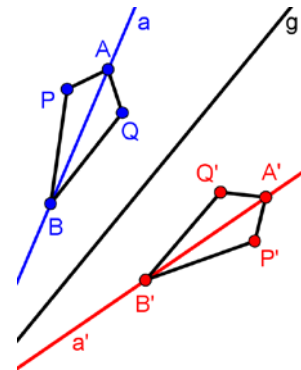
$$(3) \text{ Aus (1) folgt mit (GS}_3\text{):}$$

$$[P'A'] \cong [Q'A'] \wedge [P'B'] \cong [Q'B']$$

Def. 1.16  $\Leftrightarrow Q'$  ist das Bild von  $P'$  bzgl.  $A'B'$

Da wegen (2) und  $(I_2)$  gilt  $A'B' = a'$ , ist die Behauptung bewiesen.

#



### 2. Starkes Parallelenaxiom

Beweisen Sie:

Zu jeder Geraden  $g$  gibt es durch jeden Punkt  $P \notin g$  immer **genau eine** Parallele.

5 BE

**Beweis:**

Zu zeigen ist die Existenz einer Parallelen und deren Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit wurde bereits mit dem Beweis zum P-Satz 1.2 (Euklidisches Parallelenaxiom) gezeigt. Für den Beweis des starken Parallelenaxioms muss also nur noch die Existenz einer Parallelen gezeigt werden, also dass es zu jeder Geraden  $g$  durch jeden Punkt  $P \notin g$  immer eine Parallele gibt.

Noch zu zeigen:  $\exists_{k \subset \varepsilon} k \parallel g \wedge P \in k$

$$(1) \text{ Nach Satz 1.21 gilt: } \exists!_{h \subset \varepsilon} h \perp g \wedge P \in h$$

$$\text{Nach Satz 1.21 gilt weiter: } \exists!_{k \subset \varepsilon} k \perp h \wedge P \in k \quad (*)$$

$$(2) \text{ Nach Satz 1.22 und Satz 1.20 (Die Relation „}\perp\text{“ ist symmetrisch.) folgt aus}$$

$$h \perp g \wedge k \perp h \text{ direkt } k \parallel g.$$

Mit (\*) ergibt sich:  $k$  ist eine Parallele zu  $g$  durch  $P$ .

#

### 3. Innenwinkel im Rechteck

Beweisen Sie mit Hilfe der Sätze 1.22 und 1.26: Sind in einem Viereck  $ABCD$  drei Winkel rechte, dann ist auch der vierte Winkel ein rechter Winkel.

*Hinweis:* Ein Innenwinkel eines Polygons ist genau dann ein rechter Winkel, wenn die Trägergeraden der anliegenden Seiten senkrecht aufeinander stehen.

5 BE

**Anmerkung:**

Im Folgenden werden die Sätze 1.20 (Die Relation „ $\perp$ “ ist symmetrisch.) und P-Satz 1.3 (Die Relation „ $\parallel$ “ ist eine Äquivalenzrelation und damit insbesondere symmetrisch.) häufig ohne explizite Erwähnung benutzt. Machen Sie sich aber klar, dass viele Relationen nicht symmetrisch sind und damit die Reihenfolge in Relationen bei Voraussetzungen in Sätzen in der Regel wesentlich ist. Haben Sie eine andere Reihenfolge, müssen Sie sich jeweils genau überlegen, ob die entsprechende Relation symmetrisch ist oder nicht und auf welchen Satz Sie sich ggf. stützen.

**Beweis:**

Sei  $AB \perp BC \wedge BC \perp CD \wedge CD \perp DA$  (Andernfalls die Eckpunkte umbenennen!)

Zu zeigen:  $DA \perp AB$

(1) Nach Satz 1.22 folgt aus  $BC \perp CD \wedge CD \perp DA$   $BC \parallel DA$ .

(2) Nach Satz 1.26 folgt aus  $AB \perp BC \wedge BC \parallel DA$  [vgl. (1)]  $AB \perp DA$ .

(3) Da die Relation „ $\perp$ “ nach Satz 1.20 symmetrisch ist, folgt schließlich:  $DA \perp AB$

#

**Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:**

**15 BE**