

Lösungshinweise zum 3. Übungsblatt

1. Schneidet g eine Gerade h , dann auch jede Parallele zu h .

Beweisen Sie: Schneiden sich in einer Ebene ε die Geraden g und h in einem Punkt P und ist $h \cap k = \emptyset$, dann schneidet g auch die Gerade k .

5 BE

Beweis: Aus $g \cap h = \{P\}$ und $h \cap k = \emptyset$ folgt direkt $g \neq k$.

Annahme: $g \cap h = \{P\} \wedge h \cap k = \emptyset \wedge g \cap k = \emptyset$

(1) Aus $g \neq k$ und $g \cap k = \emptyset$ folgt, g ist echt parallel zu k .

(2) Aus $h \cap k = \emptyset$ folgt aber auch, dass $h \parallel k$ ist.

Aus (1) und (2) folgt mit der Transitivität der Relation \parallel : $g \parallel h$

❖ **Widerspruch zu $g \cap h = \{P\}$.**

#

2. Geradenspiegelungen sind streckentreue Abbildungen

Beweisen Sie den Satz 1.16:

Jede Spiegelung S_g an einer Geraden g in der Ebene ε ist eine **streckentreue** Abbildung der Ebene ε auf sich. Es gilt also:

$$\forall P, Q \in \varepsilon \quad S_g(P) = P' \wedge S_g(Q) = Q' \Rightarrow S_g([PQ]) = [P'Q']$$

5 BE

Beweis:

Nach Satz 1.14 sind Spiegelungen an Geraden geradentreu. Es gilt also

$$\forall P, Q \in \varepsilon \quad S_g(P) = P' \wedge S_g(Q) = Q' \Rightarrow S_g(PQ) = P'Q'$$

Zu zeigen: $A \in]PQ[\Rightarrow S_g(A) = A' \in]P'Q'[$

Sei also $A \in]PQ[$.

(1) Wegen der Geradentreue von S_g [**Satz 1.14**] folgt auch: $S_g(A) = A' \in P'Q'$

(2) Mit (**GS₃**) und (1) ergibt sich: $[PA] \cong [P'A'] \wedge [QA] \cong [Q'A']$

(3) Nach **Definition 1.4** gilt: $P-A-Q$

(4) Mit (2), (3) und **Satz 1.14** (Erhalt der Anordnung beim Streckenabtragen) folgt: $P'-A'-Q'$

(5) Nach **Definition 1.4** gilt: $A' \in]P'Q'[$

#

Bemerkung:

Ein innerer Punkt einer Strecke $[PQ]$ wird bei einer Geradenspiegelung S_g also immer auf genau einen inneren Punkt der Bildstrecke $[P'Q']$ abgebildet. Da die Geradenspiegelung involutorisch ist, hat auch jeder Punkt auf $[P'Q']$ genau ein Urbild auf $[PQ]$. $S_g: [PQ] \rightarrow [P'Q']$ ist also eine bijektive Abbildung.

3. Relation \perp („ist senkrecht zu“)

Beweisen Sie: Die Relation „ \perp “ auf der Menge der Geraden einer Ebene ε ist weder reflexiv noch transitiv.

5 BE

Behauptung: \perp ist nicht reflexiv

Beweis:

Nach Definition 1.19 gilt: $h \perp g \Leftrightarrow S_g(h) = h \wedge h \neq g$

h ist also nicht senkrecht zu sich selbst. #

Behauptung: \perp ist nicht transitiv

Beweis:

Nach Satz 1.22 gilt: $h \perp g \wedge k \perp g \Rightarrow h \parallel k \Leftrightarrow h = k \vee h \cap g = \emptyset$.

h und k können also nicht senkrecht aufeinander stehen, da $h = k$ im direkten Widerspruch zur Definition 1.19 von $h \perp k$ steht und $h \cap g = \emptyset$ im Widerspruch dazu steht, dass aufeinander senkrecht stehende Geraden sich in einem Punkt schneiden. #

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

15 BE