

# 1. Übungsblatt

## 1. Sich schneidende Geraden

Beweisen Sie den Satz:

Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

4 BE

**Widerspruchsbeweis:**

Aussage des Satzes:  $\forall_{g,h \in \mathcal{G}} g \neq h \Rightarrow (\exists_{P \in \mathcal{P}} g \cap h = \{P\} \vee g \cap h = \emptyset)$

Annahme:  $\forall_{g,h \in \mathcal{G}} g \neq h \wedge (\forall_{P \in \mathcal{P}} g \cap h \neq \{P\} \wedge g \cap h \neq \emptyset)$

$\Rightarrow \exists_{P,Q \in \mathcal{P}} P, Q \in g \cap h$

$\Rightarrow P, Q \in g \wedge P, Q \in h$

$\stackrel{(I_2)}{\Rightarrow} g = h$      **Widerspruch zur Annahme**

$\Rightarrow$  Das Gegenteil der Annahme, die Aussage des Satzes ist richtig.

#

## 2. Geraden und Ebenen

Beweisen Sie den Satz 1.1b:

Durch zwei verschiedenen Geraden  $g$  und  $h$  die parallel sind oder sich schneiden, wird genau eine Ebene festgelegt.

4 BE

**Beweis:**

a)  $g$  und  $h$  schneiden sich im Punkt  $S$ , d. h.  $g \cap h = \{S\}$ .

Nach **(I<sub>1</sub>)** gibt es in  $g$  und in  $h$  jeweils noch einen weiteren Punkt  $G \neq S$  bzw.  $H \neq S$ .

Wegen  $g \cap h = \{S\}$  sind die drei Punkte nicht kollinear und legen nach **(I<sub>4</sub>)** genau eine Ebene  $\varepsilon$  fest.

#

b)  $g \parallel h$  und  $g \neq h$ .

Wegen  $g \neq h$  gibt es einen Punkt der in  $h$  aber nicht in  $g$  liegt. Wenn  $g$  und  $h$  beide jeweils in der Ebene  $\varepsilon$  und in der Ebene  $\eta$  liegen würden, dann wären wegen Satz 1.1a die beiden Ebenen  $\varepsilon$  und  $\eta$  identisch.

#

## 3. Parallele Geraden

Beweisen Sie folgenden Satz:

Es sind drei verschiedene Geraden  $g$ ,  $h$  und  $k$  in einer Ebene  $\varepsilon$  gegeben. Schneiden sich die Geraden  $g$  und  $h$  in einem Punkt  $P$  und gilt  $h \cap k = \emptyset$ , dann schneidet  $g$  auch die Gerade  $k$ .

4 BE

**Beweis:**

(1)  $g$ ,  $h$ ,  $k$  sind verschiedene Geraden

(2)  $g \cap h = \{P\} \Rightarrow g \nparallel h$

(3)  $h \cap k = \emptyset \Rightarrow h \parallel k$

(4) Nach **(P)** gilt für drei Geraden  $g$ ,  $h$ ,  $k$  einer Ebene  $\varepsilon$ :  $g \parallel k \wedge k \parallel h \Rightarrow g \parallel h$

Die zu dieser Aussage äquivalent Kontraposition besagt:

$$g \nparallel h \Rightarrow g \nparallel k \vee k \nparallel h$$

$\stackrel{h \parallel k}{\Rightarrow} g \nparallel k$ , also schneidet die Gerade  $g$  die Gerade  $k$ .

#

#### 4. Zwischenbeziehung

Beweisen Sie:  $A-B-C \wedge A-C-D \Rightarrow A-B-D \wedge B-C-D$

4 BE

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 & (A - B - C) \wedge (A - C - D) \\
 \Leftrightarrow & ((A < B < C) \vee (C < B < A)) \wedge ((A < C < D) \vee (D < C < A)) \\
 \Leftrightarrow & ((A < B < C) \wedge (A < C < D)) \vee \underbrace{((A < B < C) \wedge (D < C < A))}_{\text{Widerspruch (Transitivität und Asymmetrie von } < \text{)}} \\
 & \vee \underbrace{((C < B < A) \wedge (A < C < D))}_{\text{Widerspruch (Transitivität und Asymmetrie von } < \text{)}} \vee ((C < B < A) \wedge (D < C < A)) \\
 \Rightarrow & ((A < B < C) \wedge (A < C < D)) \vee ((C < B < A) \wedge (D < C < A)) \\
 \Rightarrow & (A < B < C < D) \vee (D < C < B < A) \\
 \Rightarrow & ((A < B < D) \vee (D < B < A)) \wedge ((B < C < D) \vee (D < C < B)) \\
 \Leftrightarrow & (A - B - D) \wedge (B - C - D)
 \end{aligned}$$

#

#### 5. Halbebenen

Beweisen Sie den Satz 1.4:

- a) Sind  $P$  und  $Q$  Punkte derselben Halbebene  $H$  in  $\varepsilon$  bzgl. der Geraden  $g$ , dann gehören auch alle inneren Punkte von  $]PQ[$  zu  $H$ . 3 BE
- b) Ist  $P \in g$  und  $Q \notin g$ , dann gehört die offene Strecke  $]PQ[$  ganz zu der Halbebene in  $\varepsilon$  bzgl. der Geraden  $g$ , in der  $Q$  liegt. 3 BE

**a) Beweis:**

$P$  und  $Q$  sind Punkte derselben Halbebene  $H$  in  $\varepsilon$  bzgl. der Geraden  $g$ .

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(A_3)}{\Leftrightarrow} ]PQ[ \cap g = \emptyset \\
 \Rightarrow & ]PQ[ \cap g = \emptyset \\
 \Rightarrow & \forall_{R \in ]PQ[} ]PR[ \cap g = \emptyset \\
 \Rightarrow & \text{Alle inneren Punkte von } ]PQ[ \text{ gehören zu } H.
 \end{aligned}$$

#

**b) Beweis:**

Ist  $P \in g$  und  $Q \notin g$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & PQ \cap g = \{P\} \\
 \Rightarrow & \forall_{R \in ]PQ[} ]QR[ \cap g = \emptyset \\
 \Leftrightarrow & \forall_{R \in ]PQ[} ]QR[ \text{ liegt in derselben Halbebene in } \varepsilon \text{ bzgl. der Geraden } g, \text{ in der } Q \text{ liegt.} \\
 \Rightarrow & ]PQ[ = \bigcup_{R \in ]PQ[} ]QR[ \text{ und liegt damit in derselben Halbebene in } \varepsilon \text{ bzgl. der Geraden } g, \\
 & \text{ in der } Q \text{ liegt.}
 \end{aligned}$$

#

## 6. Dreieck ABC

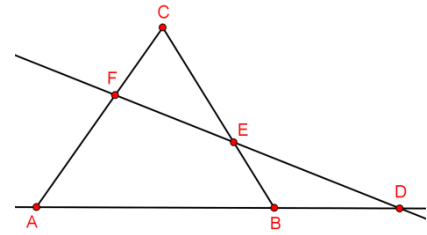
$A, B, C$  sind drei nicht kollineare Punkte. Für die Punkte  $D$  und  $E$  gilt:  $A-B-D$  und  $B-E-C$ .  
Beweisen Sie: Die Gerade  $DE$  trifft die offene Strecke  $]AC[$  in einem Punkt  $F$ .

6 BE

### Beweis:

Idee: Anwendung von **Satz 1.5 (Axiom von Pasch)**:

Sind in einer Ebene  $\varepsilon$  drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  und eine Gerade  $g$  beliebig gegeben, dann gilt: Trifft die Gerade  $g$  die offene Strecke  $]AB[$ , aber keinen der Punkte  $A, B, C$ , dann trifft  $g$  auch mindestens eine der offenen Strecken  $]AC[$  oder  $]BC[$ .



Zu zeigen: Voraussetzungen des Satzes

- (1) Die drei nicht kollinearen Punkte  $A, B, C$  legen nach **(I<sub>4</sub>)** genau eine Ebene  $\varepsilon$  fest.
- (2) Nach **(I<sub>5</sub>)** liegen auch die Geraden  $AB, AC$  und  $BC$  in  $\varepsilon$ .
- (3) Wegen  $A-B-D$ , liegt der Punkt  $D$  auf  $AB$  und damit in  $\varepsilon$ .
- (4) Wegen  $B-E-C$ , liegt der Punkt  $E$  auf  $BC$  und damit in  $\varepsilon$ .
- (5) Wegen (3) und (4) sowie **(I<sub>2</sub>)** und **(I<sub>5</sub>)** liegt  $DE$  ( $:= g$ ) in  $\varepsilon$ .
- (6) Wegen  $B-E-C$ , also  $E \in ]BC[$  schneidet  $DE$  die offene Strecke  $]BC[$  und geht damit nicht durch deren Endpunkte  $B$  bzw.  $C$ .
- (7)  $DE$  schneidet  $AB$  im Punkt  $D$  und es gilt  $DE \neq AB$ , weil  $C \notin AB$  und  $E \in ]BC[$ . Damit inzidiert  $DE$  auch nicht mit dem Punkt  $A$ .
- (8) Mit (3), (4), (5), (6) und (7) sind die Voraussetzungen des Satzes 1.5 erfüllt. Also trifft  $DE$  entweder die offene Seite  $]AB[$  oder die offene Strecke  $]AC[$ .
- (9) Wegen  $A-B-D$ , ist  $D \notin ]AB[$ .
- (10) Aus (8) und (9) folgt:  $DE$  trifft die offene Strecke  $]AC[$  in einem Punkt  $F$ . #

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

28 BE